Einsatzmöglichkeiten für GeoGebra in der 5. Klasse AHS

CHRISTIAN DORNER (UNIV. WIEN)

Welchen Nutzen hat GeoGebra für den Unterricht in der 5.Klasse AHS? Wie lässt sich ein dynamisches Geometrieprogramm, wie GeoGebra, in dieser Schulstufe einsetzen? Die Software bietet eine Vielzahl von Funktionen, aber welche Werkzeuge, Befehle und Ansichten sollen nun im Unterricht durchgenommen werden? Welche Verständnisprozesse können mit dynamischer Mathematiksoftware besonders gefördert werden? Der Aufsatz gibt Antworten auf die obigen Fragen und liefert konkrete Einsatzmöglichkeiten für den Schulunterricht, die sich inhaltlich an der 5. Klasse AHS orientieren.

1. Einleitung

Das Softwarepaket GeoGebra wurde speziell für den Unterricht entwickelt und bringt sich dadurch für die Verwendung in der Sekundarstufe II eigentlich von selbst ins Gespräch. Die Tatsache, dass im Herbst 2014 diejenigen Schülerinnen und Schüler die 5. Klasse AHS beginnen, für die im Jahr 2018 der Technologieeinsatz bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung verbindlich vorgeschrieben ist, sorgt für erhöhte Aufmerksamkeit gegenüber dem Programm. Wenn man als Lehrperson den Einsatz einer Technologiesoftware aufbauend einführen möchte, dann wird man spätestens in der 9. Schulstufe damit anfangen. Die überlegte Einführung einer Technologie im Unterricht bringt einige Fragen mit sich.
Zuallererst wird man der Frage nachgehen: Welche Anforderungen stellt die standardisierte Reifeprüfung an eine Technologie? Anschließend bleibt zu klären, welche Technologie im Mathematikunterricht verwendet werden soll? In den meisten Fällen läuft das auf die Entscheidung zwischen einem Laptop mit entsprechender Software oder einem Handheldprodukt hinaus. Bei der Einführung von Laptopklassen im AHS-Bereich bietet sich GeoGebra an. Bis zu einer Entscheidungsfindung bedarf es der einen oder anderen Diskussion im Kollegium bzw. in der Fachkonferenz. Dieser oft mühsame Weg führt uns aber zu dem Punkt, wo die meisten Fragen erst beginnen. Welche Inhalte eignen sich für eine Bearbeitung mit GeoGebra? Welche Funktionen sollen im Unterricht durchgenommen werden? Mit welchen Werkzeugen sollen Schüler/innen arbeiten? Wann soll GeoGebra im Unterricht eingesetzt werden? Was soll unbedingt schon in der 5. Klasse gemacht werden? Wie lässt sich das Erlernen des Programms mit mathematischen Inhalten verknüpfen? Wie initiiere ich Denkvorgänge bei den Lernenden anstatt wildes Herumziehen mit netten Effekten zu forcieren?
Der Autor ist davon überzeugt, dass den LeserInnen noch einige weitere dazu passende Fragen einfallen werden. Eines sei vorweg schon gesagt, in diesem Artikel werden nicht alle oben aufgeworfenen Fragen beantwortet. Das würde auch den Rahmen sprengen, denn eigentlich hat sich beinahe jede Frage einen eigenen Aufsatz verdient. Diese Abhandlung liefert einen strukturierten Blick auf Einsatzmöglichkeiten in der 5. Klasse AHS. Die Brisanz des Themas geht in vielen Fällen, wie zuvor erwähnt, von der standardisierten Reifeprüfung aus. Bis zum April 2014 wurde nichts Näheres bekanntgegeben, bis auf die Anforderungen an die Technologie. So schreibt das BIFIE den verbindlichen Einsatz, sogenannter höherwertiger Technologie vor, darunter versteht man eine Technologoie, die eine DGS (Dynamische Geometrie Software), ein CAS (Computer Algebra System) und ein Tabellenkalkulationsprogramm enthält. Mit näheren Informationen über „Technologiefertigkeiten", die Schüler/innen zu erwerben haben, hält sich das Institut (noch?) zurück. Bei genauerer Überlegung fallen einem aber sofort drei Punkte ein, die ziemlich sicher gekonnt werden müssen. Das sind das Zeichnen und Untersuchen von Funktionsgraphen, das Lösen von Gleichungen und Gleichungssysteme mit Hilfe eines CAS, das Beherrschen einfacher statistischer Anwendungen sowie das entsprechende Verwenden einer Tabellenkalkulation. Die Vorstellungen über die tatsächliche Umsetzung, d. h. den Technologieeinsatz während der Reifeprüfung, reichen von aufbereiteten Dateien, die die Schüler/innen bearbeiten müssen, bis hin zu deren bloßer Nutzung, wobei das Programm während der Prüfung zu Verfügung steht und die Kandidaten entscheiden müssen, ob und wie sie dieses benutzen. Aufgrund der Tatsache, dass das Ministerium nicht eine Technologie für alle Schulen bestimmen kann, es herrscht ja freier Wettbewerb, finden in den Schulen unterschiedliche Produkte den Einzug in die Klassenzimmer. Die Produktvielfalt lässt auf letztere Nutzungsweise schließen.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 47, 2014, S 33 - 47

2. Eine mögliche Strukturierung der Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra

Das Verwenden von GeoGebra als Technologie im Unterricht eröffnet jeder Lehrperson eine Vielzahl an Möglichkeiten. Das Demonstrieren von mathematischen Sachverhalten, das Entdecken von Zusammenhängen, das Wiederholen und Üben von bereits gelernten Inhalten, all das und noch vieles mehr lässt sich mit GeoGebra durchführen. Gewisse Dateien, im Folgenden auch Applets genannt, müssen zu Hause vorbereitet werden. Dabei stellt sich die Frage wie viel einer Konfiguration nun die Lehrenden und wie viel die Lernenden erstellen sollen.

Um über die folgenden Beispiele sinnvoll sprechen zu können, wird in diesem Abschnitt ein gangbarer Weg zur Strukturierung der Einsatzmöglichkeiten vorgestellt. Wir wollen uns nun für alle Applets folgende Fragen stellen: Wer arbeitet aktiv, Schüler/innen oder Lehrer? Wie stark wird die GeoGebra-Datei vorstrukturiert? Wie lange dauert der Einsatz im Unterricht? Daraus lassen sich nun drei Merkmalausprägungen ableiten: **Aktivität**, **Fokussierungsgrad** und **Zeit**. Aus der Eigenschaft **Aktivität** soll hervorgehen, wer aktiv mit GeoGebra arbeitet, also die Lehrperson oder der/die Schüler/in. Unter der Ausprägung **Zeit** soll die Dauer einer Einsatzmöglichkeit festgelegt werden. Eine dreistufige Zeitskala gibt an, in welchem zeitlichen Umfang der Technologieeinsatz stattfindet. Die erste Stufe steht für kurze Sequenzen (bis zu 15 Minuten) innerhalb einer Unterrichtseinheit. Die zweite Stufe bedeutet, es handelt sich um einen Einsatz der ungefähr eine Unterrichtseinheit in Anspruch nimmt. Eine Verwendung von GeoGebra über mehrere Unterrichtseinheiten weist die dritte Stufe aus. Der Begriff **Fokussierungsgrad** bedarf einer genaueren Erläuterung. Generell versteht der Autor darunter diejenige Einstellung einer Konfiguration in GeoGebra, die die Lehrperson trifft, um die Komplexität zu reduzieren (vgl. Roth, J., (2008-1), verändert). In diesem Zusammenhang unterscheidet man:

1. Vollständig vorgegeben: Die wesentlichen Elemente der Konfiguration sind hervorgehoben. Die Werkzeugleiste ist kaum benutzbar bzw. es ist nicht nötig diese zu benutzen. Ausgenommen sind Werkzeuge für Veränderung der Ansicht. Die Variationsmöglichkeiten innerhalb der Konfiguration sind beschränkt.

2. Teilweise vorgegeben: Die Konfiguration kann bzw. muss ergänzt oder verändert werden. Die wesentlichen Elemente sind teilweise hervorgehoben. Die Werkzeugleiste ist teilweise benutzbar.

3. Unstrukturiert: GeoGebra wird selbstständig und ohne Vorgaben und Einschränkungen genutzt, man bleibt jedoch in den von GeoGebra vorgegebenen Möglichkeiten.

4. Erweiternd: Es werden neue/eigene Werkzeuge erstellt bzw. GeoGebra wird an sich als Werkzeug verwendet. In dieser Stufe wird GeoGebra vom Benutzer erweitert.

Der Autor unterscheidet durch die obigen Merkmalausprägungen sieben verschiedene Nutzungsweisen der Software GeoGebra im Unterricht. Diese lassen sich in einem Koordinatensystem darstellen, siehe Abbildung 1.

GeoGebra-Dateien zur **Demonstration** werden von der Lehrperson benutzt um das Gesagte bildlich animiert zu unterstützen. Der Einsatz ist meist von kurzer Dauer und beim Öffnen sieht man bereits die vollständige Konfiguration, es handelt sich hier um einen vollständig vorgegebenen Fokussierungsgrad.

Die Nutzung als **Werkzeug** (siehe Abbildung **Werkzeug I**) lässt die Lernenden an einer vollständig vorgegebenen Konfiguration arbeiten. Es handelt sich meist um Routinetätigkeiten, die die Software übernimmt. Durch die damit verbundene Zeitersparnis ergibt sich eine kurze Einsatzzeit. Unter **Werkzeug II** versteht der Autor das Erstellen von Werkzeugen, das durchaus komplex und schwierig sein kann. Hier bedarf es unter Umständen der Hilfe der Lehrperson. Aus diesem Grund sieht man die Nutzungsweise auf beiden Aktivitätsfeldern, sowohl bei den Lernenden als auch bei den Lehrenden. Die Abschrägung soll deutlich machen, dass der Schwerpunkt in der Nutzung bei den Lernenden liegt.

GeoGebra-Applets zu **Lernzwecken** werden für Schüler/innen erstellt, die anhand von kurzweiligen (zeitlich gesehen), vollständig vorgegebenen Aufbereitungen den Stoff wiederholen.

Das **Entdecken** mit Hilfe von GeoGebra nimmt in vielen Fällen mehr Zeit in Anspruch. Die teilweise

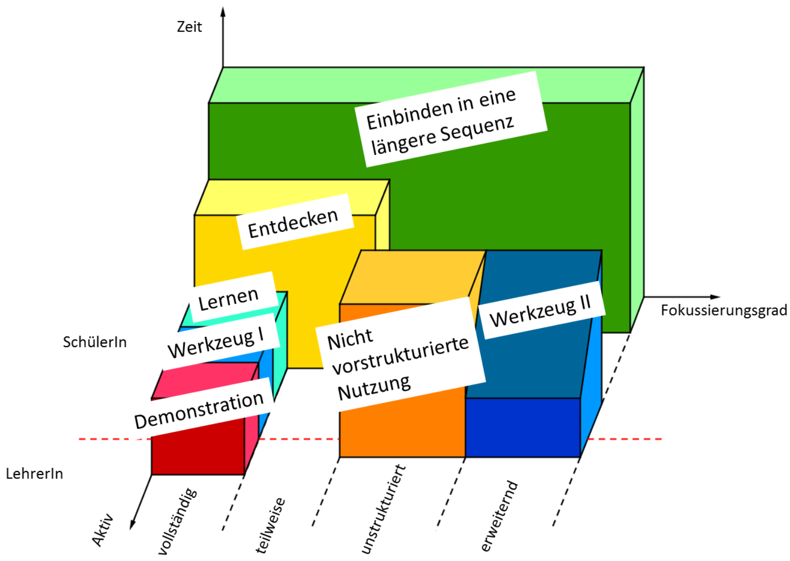

Abbildung 1: Übersicht Nutzungsweisen

bis hin zu vollständig vorgegebenen Applets führen die Lernenden im Idealfall zur Entdeckung eines mathematischen Sachverhalts bzw. Zusammenhangs.
Unter **nicht vorstrukturierter Nutzung** versteht der Autor jene Nutzungsweise von GeoGebra, in der keine Dateien vorgegeben werden, sondern das Programm den Lernenden zur Verfügung steht, wobei es diesen überlassen bleibt, ob sie es benutzen wollen.
Eine Einbindung in eine längere Sequenz, wie zum Beispiel in einen Lernpfad, beinhaltet einige Aspekte der zuvor erwähnten Einsatzweisen und umfasst in einer auf die Lernenden konzentrierten Art und Weise alle möglichen Fokussierungsgrade. In diesem Aufsatz wird auf diese Nutzungsweise als einzige nicht näher eingegangen. Stattdessen sei auf die diesbezüglich nützlichen Links am Ende des Aufsatzes verwiesen, die einige Ideen für den Unterricht bereitstellen.

3. Demonstrationsapplets

Demonstrationsapplets werden dazu benutzt einen mathematischen Sachverhalt anschaulich zu erklären. GeoGebra unterstützt das Erklärungen der Lehrperson durch eine interaktive und dynamische Darstellung, also eine Art Tafel 2.0. Eine Applikation dieser Art ist vollständig fokussiert, um der Lehrperson ein schnelles Visualisieren ihrer Gedanken zu ermöglichen. Allerdings arbeitet nur die Lehrperson aktiv mit GeoGebra und die SchüerInnen sind passiv. Applets zu Demonstrationszwecken eignen sich meist am Beginn eines Denkprozesses oder prozessbegleitend, im Schulunterricht empfiehlt sich daher ein Einsatz in der Einstiegsphase oder in der Erarbeitungsphase. Diese Anwendung deckt meist einen nur kleinen Teil des Lehrstoffes ab, ansonsten würden die Zuseher zu lange in einer passiven Phase verweilen bzw. mit neuen Inhalten überladen werden.

3.1. Ideen dazu

GeoGebra bietet eine Vielzahl von Möglichkeiten Applets zu Demonstrationszwecken zu erstellen. Die neueste Besonderheit von GeoGebra ist das Grafikfenster 3D. Bei der Fertigstellung des Artikels ist GeoGebra 5 noch nicht veröffentlicht worden, sehr wohl aber stand die Beta Version von GeoGebra 5 bereits zum Download zur Verfügung. Eines der größten Anwendungsgebiete für GeoGebra 3D im Mathematikunterricht in der AHS Oberstufe ist mit Sicherheit das Kapitel „Vektoren in $\mathbb{R}^3$“, wobei der Lehrplan dieses erst in der sechsten Klasse vorschreibt. Im Folgenden werden zwei Ideen zu Demonstrationsapplets für GeoGebra 3D in der 5. Klasse AHS vorgestellt.

1. Trigonometrie: In allen Schulbüchern finden sich sogenannte Vermessungsaufgaben zu diesem Thema, wo Berechnungen in beliebigen Dreiecken angestellt werden müssen. Eine große Hürde

für die Lernenden stellt das Erstellen einer passenden Skizze dar. Dabei gibt es meist zwei Schwierigkeiten die auftreten können. Viele Aufgabenstellungen beschreiben einen dreidimensionalen Sachverhalt, die erste Komplikation kann sich schon beim Vorstellen dieser Problemstellung ergeben. Das Umsetzen der Vorstellung in eine geeignete und auf einem Blatt Papier immer zweidimensionale Skizze kann sich als zweites Hindernis erweisen. Eine typische Aufgabe aus diesem Problemkreis ist die folgende (Quelle: Malle, G./Woschitz, H./Koth, M./Salzger, B., (2010), verändert):
Von der Plattform eines Leuchtturms, die sich in der Höhe h über dem Meeresspiegel befindet, sieht man das Boot A mit dem Fernrohr unter dem Tiefenwinkel α*. Nach Schwenken des Fernrohres um den Horizontalwinkel* ω *sieht man das Boot B unter dem Tiefenwinkel* β*. Fertige eine Skizze an!*
Hier kann GeoGebra 3D bei der der Vorstellungskraft behilflich sein. Die Lehrperson baut zuvor den Sachverhalt in GeoGebra nach, um dann dieses Applet im Unterricht rasch einsetzen zu können. Ein Beispiel, wie so ein Applet zu der oben gestellten Aufgaben aussehen könnte, sieht man in der Abbildung 1. GeoGebra liefert nun eine zweidimensionale Abbildung des Sachverhalts, die dreidimensional animiert ist. Die Software schlägt die oben genannten Probleme mit einer Klappe. Die Ansicht lässt sich mit einem Werkzeug beliebig verändern und kann auch zu einer Diskussion über eine passende Ansicht für eine zweidimensionale Skizze genutzt werden. Hierbei bleibt zu sagen, dass so ein Demonstrationsapplet zu Beginn des Themas als Vorstellungshilfe dient. Die Schüler/innen sollen unbedingt das Zeichnen von Skizzen lernen. Das muss m. E. im Unterricht auch explizit mit Papier und Bleistift geübt werden.

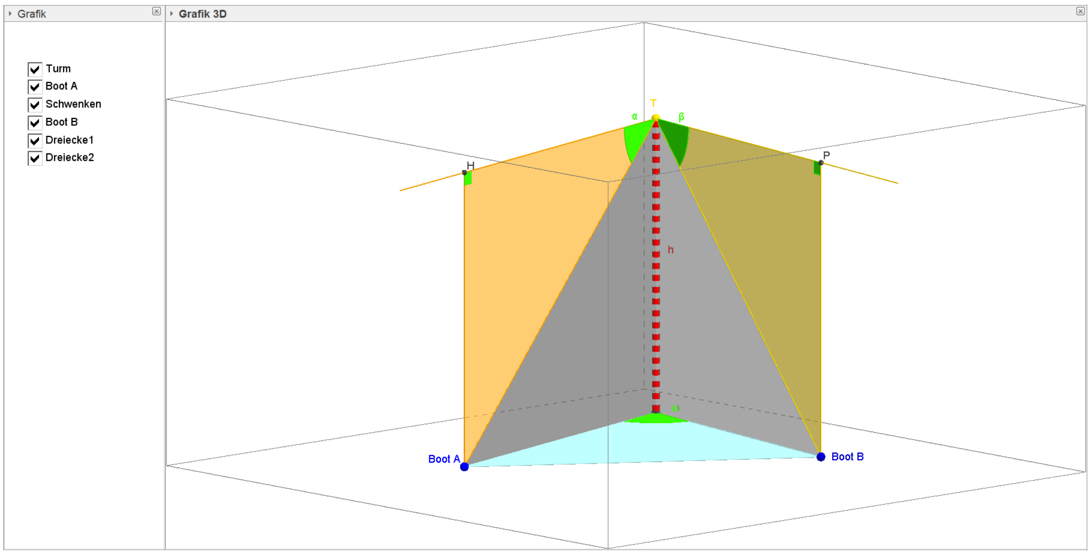

Abbildung 2: Demonstrationsapplet animierte Skizze in GeoGebra 3D

2. Füllfunktionen: In einigen Lehrbüchern befinden sich im Kapitel (reelle) Funktionen Aufgaben zu Füllvorgängen, bei denen ein Gefäß gleichmäßig mit Wasser gefüllt wird (vgl. Malle, G./Woschitz, H./Koth, M./Salzger, B., (2010), S. 135). Gesucht ist dann eine Funktion, die jedem Zeitpunkt t eine Füllhöhe $h(t)$ zuordnet, diese wird Füllfunktion genannt. Die Schüler/innen sollen aufgrund einer zweidimensionalen Skizze des zu befüllenden Gefäßes den Graphen der dazugehörigen Füllfunktion qualitativ skizzieren. Diese Art von Aufgaben bereiten einigen Schüler/innen unter Umständen zu Beginn ein paar Schwierigkeiten. Die kognitive Vorstellung des Füllvorgangs, die Verwechslung zwischen der Höhe und dem Volumen bis hin zur Vorstellung des durch eine zweidimensionale Skizze (z. B. Querschnitt eines Rotationskörpers), gegebenen Gefäßes können Probleme bereiten. Hierbei eignet sich m. E. die Verwendung des folgenden Demonstrationsapplets. Ein Grafikfenster zeigt eine dreidimensionale Animation des Füllvorgangs und das zweite Grafikfenster visualisiert das Entstehen des Graphen der Füllfunktion. Vor allem der gleichzeitige Ablauf der beiden Vorgänge vereinfacht die Vorstellung der vorliegenden Aufgabe. Es bleibt wie-

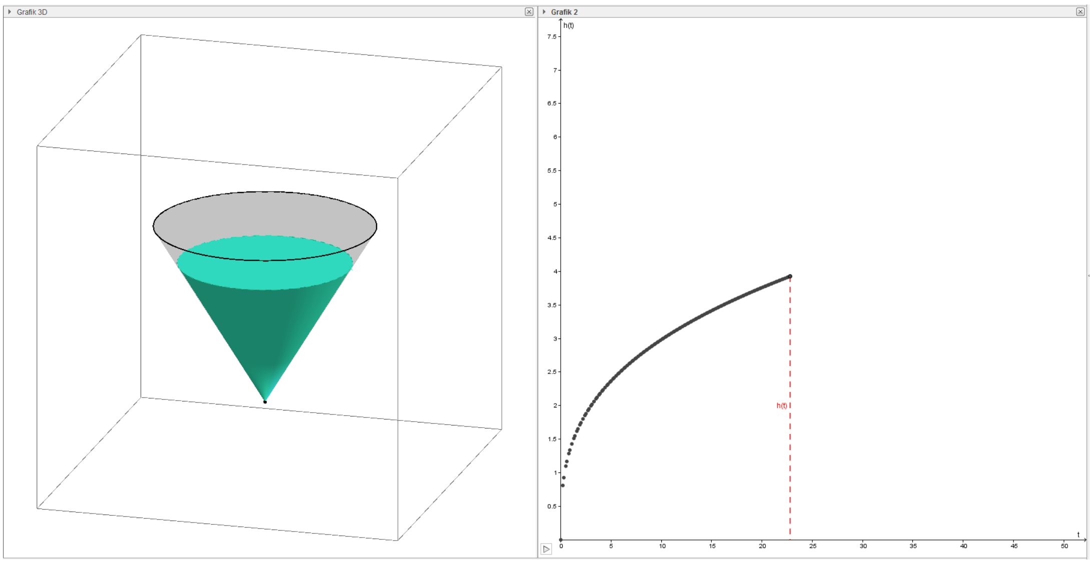

Abbildung 3: Demonstrationsapplet Füllfunktion

der zu erwähnen, dass im Anschluss die Schüler/innen selbst Denkvorgänge diesbezüglich anstellen sollen bzw. müssen. Ein Demonstrationsapplet in GeoGebra soll kein Denkersatz sein, sondern in diesem Fall einen Anstoß in die richtige Denkrichtung liefern. In empirischen Untersuchungen zeigt sich, dass solche vernetzte multimediale Darstellungen zur Lesefähigkeit von Funktionsgraphen beitragen können (vgl. Vogel, M., (2007), S. 18ff).

3. Weitere Ideen (bzw. für einige LeserInnen sicher schon „Klassiker“): Einheitskreis, Funktionen: Visualisieren des Zuordnungsaspekts, Variationsaspekts (vgl. Hohenwarter, M., (2006-2), S. 4), Kosten- und Erlösfunktionen, Zeit-Ort-Funktionen, Wirkung von Parameter k und d bei einer linearen Funktion, Wirkung der Parameter a, b und c bei einer quadratischen Funktion, Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, Parameterdarstellung einer Geraden.

3.2. Mögliche Gefahren

Die Passivität der Schüler/innen kann dazu führen, dass diese zwar zusehen, aber nicht mitdenken. Es findet also kein selbstständiges Denken in deren Köpfen statt und das Programm GeoGebra wird dabei auch nicht erlernt. Im Sinne der biokybernetischen Lerntheorie soll eine solche Applikation einen Denkanstoß liefern um darauf weiter aufbauen zu können. Ohne weitere Verwendung im Unterricht ist das gezeigte Demonstrationsapplet nutzlos, es wird auf alle Fälle eine weitere Vertiefung benötigt, um einen nachhaltigen Effekt zu bekommen.

4. Entdeckungsapplet

Das Ziel des Einsatzes im Unterricht eines solchen Applets geht eigentlich schon aus dem Namen hervor. Schüler/innen sollen einen mathematischen Inhalt oder Zusammenhang selbstständig entdecken. Eine Applikation dieser Art besitzt im Sinne der obigen Strukturierung folgende drei Merkmale. Die Aktivität liegt bei den Schüler/innen. Der Fokussierungsgrad ist vollständig bzw. teilweise vorgegeben, letzteres dann, wenn bestimmte Konstruktionen bei der Entdeckung eines mathematischen Zusammenhangs getätigt werden müssen bzw. hilfreich sind. Die Arbeitszeit die Schüler/innen dafür aufwenden, geht von einer kurzen Sequenz bis hin zu einer Unterrichtseinheit, je nachdem was verlangt wird. Dementsprechend deckt das Applet einen kleinen Ausschnitt des Lehrstoffes ab und eignet sich daher für Einstiegs- oder Erarbeitungsphasen.

4.1. Idee dazu

Wie soll nun ein oben beschriebenes Applet aussehen? Hier ein möglicher Vorschlag: In einem vorgelagerten Text befindet sich die Angabe des Problems. Der Hauptteil stellt das GeoGebra-Fenster dar, das interaktiv bearbeitbar ist. In einem nachgelagerten Teil befinden sich die zu erledigenden Aufgabenstellungen. Der Screenshot in Abbildung 4 zeigt ein Entdeckungsapplet zur Kosten- und Preistheorie. Hier gilt es zu entdecken, wie sich in dem Fall der Break-Even-Punkt in Abhängigkeit von den variablen Kosten verändert. Ein paar technische Details dazu: So eine GeoGebra-HTML-Datei lässt sich selbst

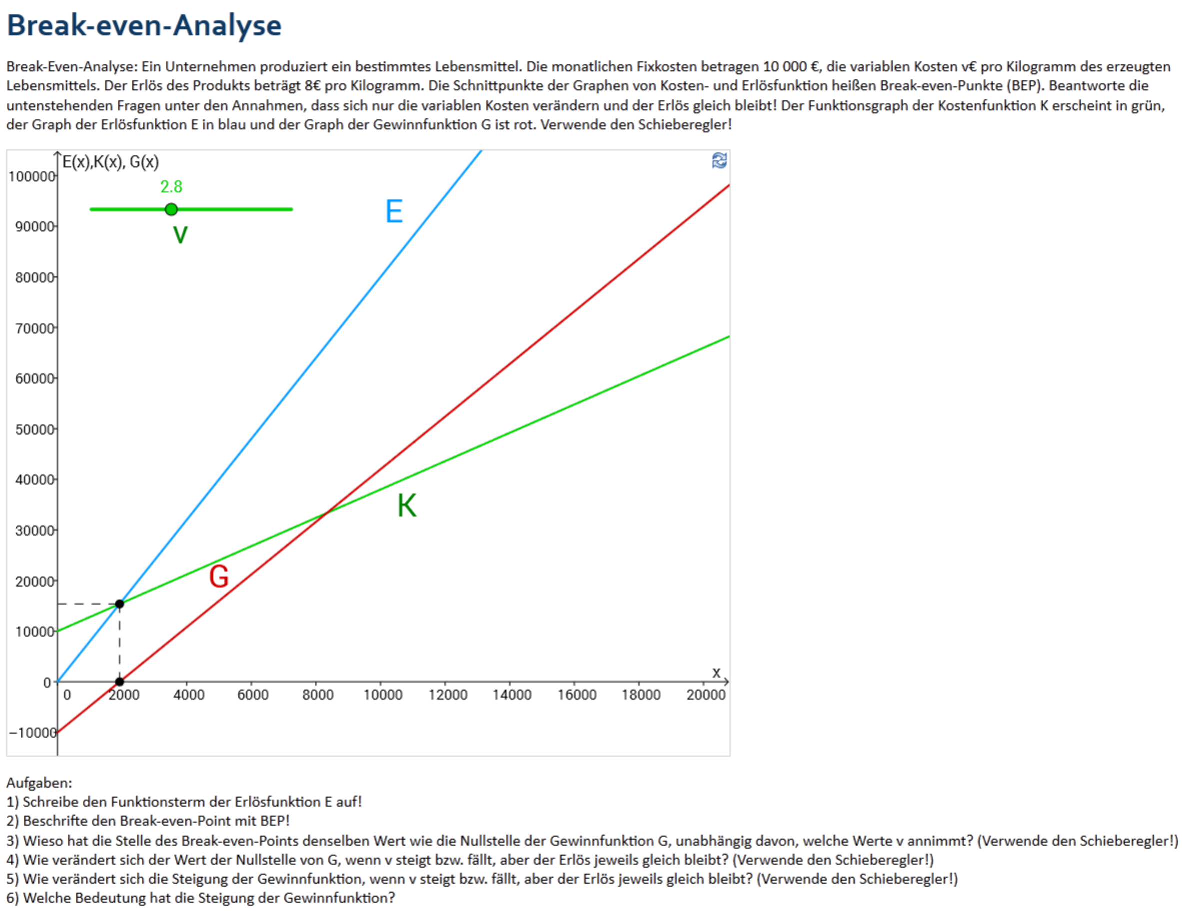

Abbildung 4: Entdeckungsapplet Break-Even-Punkt-Analyse

erstellen, wenn man einen GeoGebra-Account hat (auf `http://tube.geogebra.org/` 16.4.2014 kostenlos einzurichten) und seine Konfiguration auf GeoGebra-Tube hochlädt (In GeoGebra: Menüleiste ⇒ Datei ⇒ Teilen). Es bleibt zu erwähnen, dass es keinen Veröffentlichungszwang gibt, der/die UserIn bestimmt wer das File sehen darf und wer nicht.

4.2. Mögliche Gefahren

Entdeckungsapplets neigen hin- und wieder dazu, die Lernenden zu überfordern. Die Gründe dafür sind von vielfältiger Art. So kann es sein, dass die User mathematische Lücken aufweisen, die eine Bearbeitung unmöglich machen. Wir konzentrieren uns aber nun auf die gestalterischen Maßnahmen in einem Applet. Der Fokussierungsgrad erweist sich als sehr wichtig. Mangelnde Fokussierung bedeutet, dass das Wesentliche der Konstruktion nicht ersichtlich ist. Das andere Extrem kennt man auch zu gut, alles blinkt und bewegt sich bzw. lässt sich bewegen. Schüler/innen, die ja mit dem Entdecken des Zusammenhangs beschäftigt sein sollten, müssen sich nun auch noch mit der unübersichtlichen Konstruktion auseinandersetzen. Das kann so weit gehen, dass einige Schüler/innen nur noch wild Hin- und Herziehen und die Aufgabenstellungen nicht bearbeiten bzw. bearbeiten können. Auch die Aufgabenstellungen selbst müssen prägnant formuliert sein und haben die Aufgabe, die Lernenden zu einer Entdeckung zu führen und dafür eine Art roter Faden zu sein.

5. Lernapplet

Bei Lernapplets steht das **Festigen von Grundwissen bzw. Grundkompetenzen** im Vordergrund. Applikationen dieser Art bestehen im Wesentlichen aus drei Punkten: einer **Aufgabenstellung**, einer **kognitiven Anstrengung** der Lernenden und einer **Möglichkeit zum Nachlesen des Stoffes**. Bei der Aufgabenstellung muss es sich um eine klare und deutliche Arbeitsanweisung an die Lernenden handeln, sodass diese genau wissen, was zu tun ist. Die Aktivität der Schülerinnen und Schüler steht hier im Vordergrund, dabei soll gewährleistet sein, dass diese eine kognitive Anstrengung zu bewältigen haben. Der dritte Punkt macht klar, dass bei Lernapplets nur die Schülerinnen und Schüler arbeiten. Falls sich jemand nicht mehr an den Stoff erinnern kann, gibt es die Möglichkeit, diesen mit einem Klick nachzulesen. Das erspart der Lehrperson sicherlich auch einige Wege im Klassenraum. Aufgrund der oben angeführten klaren Strukturierung des Applets sind diese vollständig fokussiert. Im Mathematikunterricht eignet sich der Einsatz in der Ergebnissicherungsphase zum selbstständigen Arbeiten.

5.1. Ideen dazu

Die hier erstellten Lernapplets beinhalten jeweils mindestens drei Buttons: „Kontrolle“, „Neuer Versuch“ und „Worum geht es?“. Der erste Button dient dazu ein Feedback nach der Bearbeitung zu bekommen, wenn sich ein Fehler eingeschlichen hat und man als Feedback „Es ist ein Fehler passiert, versuche es erneut!“ bekommt, dann verwendet man die Schaltfläche „Neuer Versuch“ um von vorne zu beginnen.

1. Mengen und Mengendiagramm (siehe Abbildung 5): In einigen Schulbüchern der fünften Klasse AHS findet man das Kapitel Mengen, jedoch GeoGebra-Applets dazu gibt es kaum. Die Abbildung 5 zeigt eine Applikation zu dieser Thematik. Man soll den blauen Punkt aus dem Text auf jene Fläche setzen, die die angegebene Menge repräsentiert. Die Kontrolle erfolgt mit Hilfe des oben beschriebenen Buttons. Für den Einsatz im Unterricht bietet es sich an mehrere Applets dieser Art mit verschiedenen Aufgabenstellungen zum vorgegebenen Diagramm zu erstellen, sodass die Lernenden den Stoff „Verknüpfungen von Mengen“ festigen können.

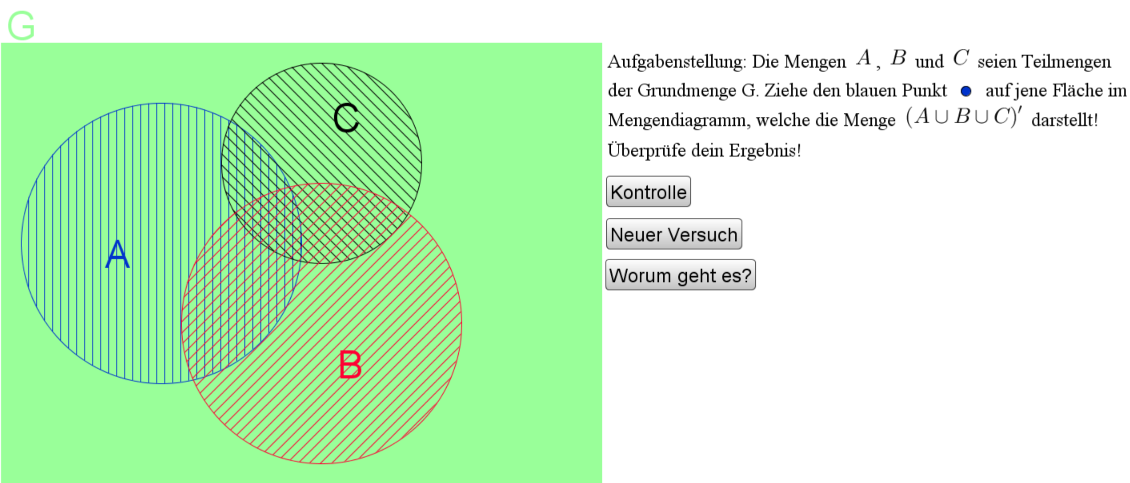

Abbildung 5: Lernapplet Mengen

2. Lineare Funktion (siehe Abbildung 6): Diese Aufgabe zielt auf das Zeichnen des Graphen einer linearen Funktion f ab. Die Angabe zeigt eine Termdarstellung von f an und anschließend sind die Punkte A und B so zu verändern, dass die Verbindungsgerade der beiden Punkte den Graph von f

repräsentiert. Das Applet beinhaltet diesmal vier Buttons und ein Kontrollkästchen. Die Funktion von drei Buttons der vier sind inzwischen klar, der vierte Button „ neue Werte für k und d“ liefert eine neue Termdarstellung. Hinter dieser Funktionalität versteckt sich der in GeoGebra implementierte Zufallsgenerator. Die ganzzahligen Werte erhält man mit einer passenden Multiplikation und Abrundung. Das Kontrollkästchen dient als Hilfe und blendet bei Betätigung (anhaken) das Steigungsdreieck der Geraden ein. Der vierte Button bzw. neue Werte ermöglichen ein längeres Üben und Wiederholen des gleichen Stoffes.

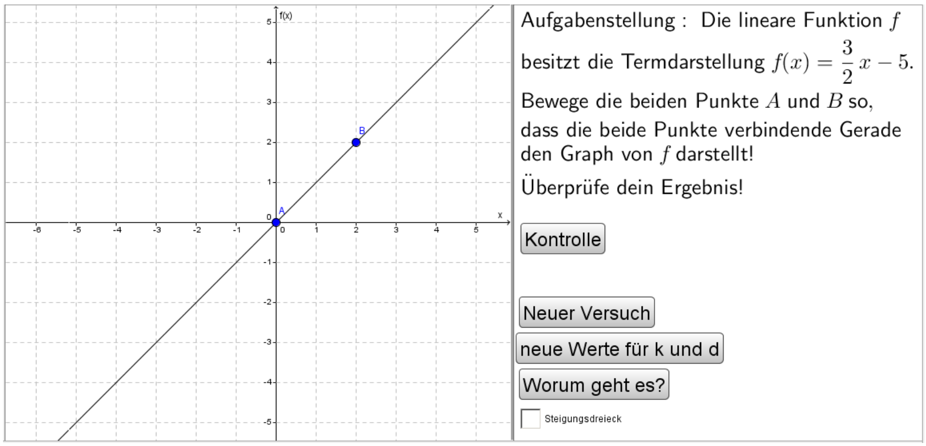

Abbildung 6: Lernapplet Lineare Funktion

Jeder kann selbst solche Schaltflächen erstellen, das gelingt indem man im Submenü des Werkzeugs „Schieberegler“ auf das Werkzeug „Schaltfläche“ klickt. Nun darf ein beliebiger Punkt des Grafikfensters gewählt werden, anschließend öffnet sich ein neues Fenster, wo man den Button benennen und programmieren kann. An dieser Stelle sei erwähnt, dass für die Programmierung die Sprache GGBScript verwendet werden kann. Diese Sprache beinhaltet eigene Befehle, die man auf der GeoGebra-Homepage nachlesen kann (siehe: `http://wiki.geogebra.org/de/Skripting_Befehle`, 16.4.2014).

5.2. Mögliche Gefahren

Der Rolle des Fokussierungsgrades darf nicht unterschätzt werden. Es sollte fast mit nur einem Blick erkennbar sein, was zu tun ist. Um das zu erreichen muss eben das Wesentliche passend hervorgehoben und die Aufgabenstellung klar formuliert sein. Wenn keine bzw. eine zu offene Aufforderung vorliegt, dann wissen die Lernenden nicht genau was zu tun ist und bearbeiten das Applet falsch bzw. gar nicht. Auch die kognitive Anstrengung darf nicht verloren gehen, ansonsten setzt sich die Lernenden nicht mit der Problematik auseinander und das eigentliche Ziel, das Festigen von Grundwissen, findet nicht statt. Das kann bei Applets passieren, wo man durch einfaches Klicken oder schlichtweg durch gedankenloses Probieren weiterkommt.

6. Werkzeugapplets

Beim Zurückblättern im Text auf die Seite 2 fällt die doppelte Anführung der Einsatzmöglichkeit Werkzeug auf. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass man GeoGebra-Applets als Werkzeug nur benutzen kann oder dass man GeoGebra-Applets selbst erstellen kann, die man anschließend als Werkzeug benutzt. Der große Unterschied liegt in der kognitiven Anstrengung. Das einfache Verwenden von vorgefertigten Dateien erfordert keine großen und geistreichen Überlegungen. Hierbei delegiert man Tätigkeiten an den Computer. Das Erstellen von Werkzeugen schwebt im Vergleich dazu in höheren Sphären und kann unter Umständen relativ komplex werden.
Die Charakterisierung des zuerst Genannten ergibt sich logisch aus dem Erwähnten. Es handelt sich dabei um eine fertige GeoGebra-Datei, die zum Lösen eines speziellen Problems dient. Im Unterricht aktiv sind ausschließlich die Lernenden, allerdings obliegt die Vorbereitung der Lehrperson, die ja durchwegs mehr

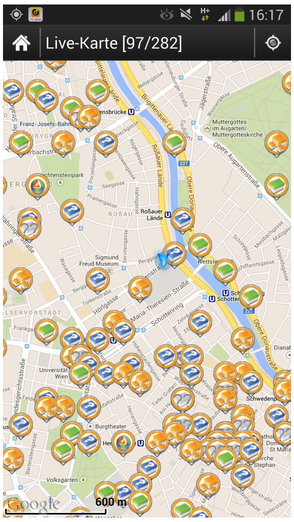

Abbildung 7: Verteilung der Geocaches in Wien (Quelle: c:geo-App für Android, 16.4.2014)

Zeit in Anspruch nehmen kann. Der einmalige Einsatz beschränkt sich im Unterricht auf das Eingeben von Werten und das Erhalten und eventuell Interpretieren der Lösung. Der Einsatz eines Werkzeugapplets dieser Art macht also nur wirklich Sinn, wenn das Werkzeug öfters gebraucht wird. Der vollständige Fokussierungsgrad vervollständigt das Bild des diskutierten Applets. Ein Beispiel dafür wäre ein Applet, das Zahlen in verschiedenen Zahlensystemen darstellt.
Die Eigenschaften eines Werkzeugapplets zweiter Art erweisen größeren Tiefgang, denn hier steht das Erstellen im Vordergrund. Um ein Werkzeug erstellen zu können, müssen Schüler/innen den Vorgang, den später das Programm erledigt, auf einer höheren Ebene verstehen. Es wird von ihnen eine Abstraktionsleistung verlangt, da sie den Ablauf in einer gewissen Allgemeinheit durchführen müssen, so dass das Werkzeug für beliebige Werte funktioniert. Das Attribut Aktivität steht Großteils bei den Lernenden, je nach Komplexität werden eventuell Teile der Konstruktion von der Lehrperson vorgezeigt. Die Konstruktionsdauer hängt wieder vom Schwierigkeitsgrad ab, angefangen von einigen Minuten bis hin zu zwei/drei Einheiten. Im Sinne des Fokussierungsgrades befinden wir uns in der höchsten Stufe, das Programm GeoGebra wird um eine Funktionalität erweitert.

6.1. Idee dazu

Es wird ein Werkzeugapplet zweiter Art zum Thema Geocaching vorgestellt. Hier können mehrere Themengebiete der fünften Klasse AHS miteinander vernetzt werden. Bevor wir einen Blick auf die Fragestellung und die Konstruktion der Applikation werfen, bedarf es eventuell einer kurzen Erklärung des Begriffs Geocaching. Was ist Geocaching? Eine einschlägige österreichische Website gibt folgende Definition: *„Geocaching ist eine Hightech Schatzsuche, das weltweit von Leuten, ausgerüstet mit einem GPS-Gerät, gespielt wird. Die Grundidee ist es, im Freien versteckte Behältnisse, genannt „Geocaches“ zu suchen und zu finden, und die Erfahrungen online zu teilen. Geocacher sind eine Gemeinschaft aus jeder Altersgruppe, mit Sinn für Gemeinschaft und Umwelt...“* (Quellle: `http://www.geocache.at/cms/startseite`, 9.4.2014). Nun ja, man könnte sich nun denken, was ist denn das für ein exotisches Hobby, das macht doch niemand. Dazu folgende Information: die Cache-Dichte in Wien beträgt ca. 8 $Caches/km^2$ und die Stadt hat damit eine der höchsten auf der ganzen Welt (vgl. `http://aj-gps.net/distribution`, 16.4.2014), siehe dazu den Screenshot (Abbildung 7) des Android-Applets *„c:geo“*. Überall dort, wo ein Symbol zu sehen ist, findet man einen Schatz bzw. eine Aufgabe, die einen dann zu einem Schatz führt. Denjenigen, die sich fragen, was man hier für einen Schatz findet, sei Abbildung 8 gezeigt. Ein „Schatz“, auch „Cache“ genannt, besteht aus einem Behälter, der ein Logbuch und zumeist auch einige Tauschgegenstände beinhaltet. In dem Logbuch tragen sich die Finder des Behälters ein und anschließend kann ein Gegenstand aus der Box entnommen werden, wenn man im Gegenzug auch einen hineinlegt. Es besteht jedoch kein Zwang zum Tauschen. Wer sich nun

Abbildung 8: typischer Inhalt eines Schatzes (Quelle: http://simple.wikipedia.org/wiki/File:Geocache_opened.jpg, 16.4.2014)

fragt, wie so eine Aufgabe aussieht, der betrachte die Aufgabe in Abbildung 9 zum Erwin-Ringel-Park! Der Anfang enthält geschichtliche Informationen zum Cache, ganz unten befindet sich die Aufgabenstellung. In diesem Fall muss man das Denkmal finden und dort die zweite Jahreszahl ablesen. Anschließend setzt man für die einzelnen Buchstaben, die aus der Jahreszahl gewonnenen Ziffern ein und man erhält die Koordinaten des versteckten Schatzes. Zusammenfassend sei das oben Erwähnte noch kurz

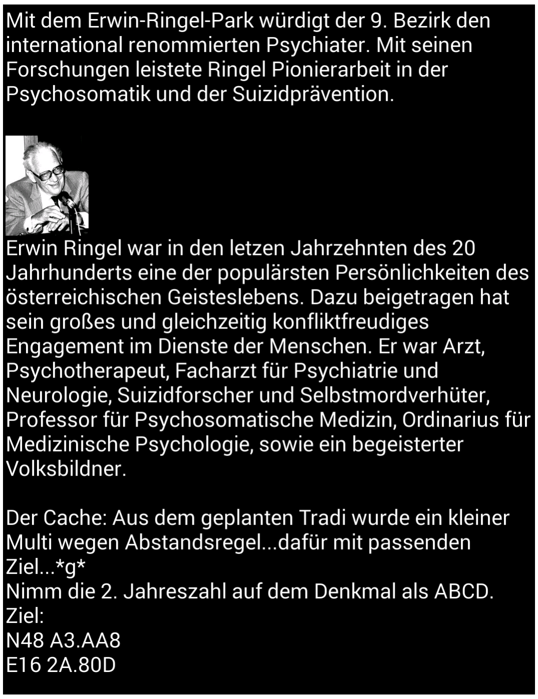

Abbildung 9: Aufgabenstellung beim Geocaching (Quelle: c:geo-App für Android, 16.4.2014)

zusammengefasst: Zuerst sucht man sich die Koordinaten des Schatzes bzw. die Aufgabe, die einen zum Schatz führt, dies erreicht man über einschlägige Internetseiten oder über eine passende Handy-App. Ausgerüstet mit einem GPS-Empfänger oder einem Smartphone begibt man sich in die freie Natur und versucht einen mehr oder weniger schwierig versteckten Schatz zu finden. Geocache verbindet Bewegung, Technik und (z.T. auch mathematische) Knobelaufgaben in der freien Natur und findet auch bei Jugendlichen großen Anklang.
Es gibt schwierigere Aufgaben als die Aufgabe in Abbildung 9. Wir betrachten folgende Problemstel-

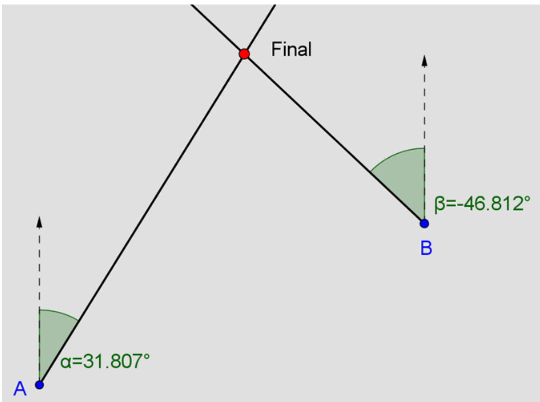

Abbildung 10: Skizze der Problemstellung

Abbildung 11: Vorbild: Applet aus dem App-Store (Quelle: https://itunes.apple.com/at/app/gctools-die-geocaching-tool/id438313105?mt=8, 16.4.2014)

lung: *Die erste Peilung findet von* $N48°12.886‘$ $E16°21.806‘$ *unter einem Winkel von* $31.807°$ *statt. Die zweite Peilung wird unter dem Winkel* $-46.812°$ *von* $N48°13.016‘$ $E16°22.268‘$ *getätigt. Das Final befindet sich beim Schnittpunkt der beiden Peilungen. Welche Koordinaten hat der Schatz?* Die Abbildung 10 verdeutlicht die Problemstellung. Unser Ziel soll es nun sein ein Applet zu erzeugen, das durch Eingabe der beiden Punkte und der beiden Peilungen die Koordinaten des Schnittpunktes angibt. Ein Vorbild stellt das im App-Store angebotene Applet dar, siehe Abbildung 11. Das Problem lässt sich bei kurzen Entfernungen auf der Erdoberfläche also auf das Schneiden zweier Geraden reduzieren, allerdings sind die GPS-Koordinaten so für die Schüler/innen der fünften Klasse nicht handhabbar, es bedarf also mit Hilfe von trigonometrischen Überlegungen einer passablen Umwandlung in kartesische Koordinaten. Wir vernachlässigen die reale Gestalt der Erde und setzen sie als Kugel fest. Es gilt für die Umrechnung der geographischen Breite: $1°$ entspricht 111,12 *km*. Die Umrechnung der geographischen Länge gestaltet sich schwieriger, da die Längengrade in der Nähe des Nordpols zusammenlaufen, dafür arbeitet man mit dem Begriff der Abweitung. Dieser bezeichnet den Abstand zweier Punkte auf einem Breitegrad. Am Äquator gilt dasselbe wie für die geographische Breite: $1°$ entspricht 111,12 *km*. Für andere Breitengrade hilft die Formel:

$$Abweitung = Differenz\,der\,Längengrade \cdot \cos(Breitengrad) \cdot 111.12 \quad (1)$$

Wir tragen die beiden Punkte aus der Angabe in ein Koordinatensystem ein. Dabei setzen wir den ersten Punkt in den Ursprung und berechnen die Abstände der beiden Punkte in Ost-West-Richtung für die erste Koordinate und in Nord-Süd-Richtung für die zweite Koordinate. Die zweite Koordinate berechnet sich einfacher: Der Abstand in Nord-Süd-Richtung beträgt $13.016' - 12.886' = 0.13'$, das sind 0.002167° und das entspricht einer Entfernung von 0.24076 km bzw 240.76 m. Die erste Koordinate ergibt sich durch Einsetzen in die obige Formel. Wir berechnen die Abweitung in Ost-West-Richtung und nehmen dazu an, dass sich die beiden Punkte auf demselben Breitenkreis befinden. Der Abstand beträgt $22.268' - 21.806' = 0.462'$, das sind 0.0077°. Wir multiplizieren gemäß der Formel 0.007 mit $cos(48 + \frac{12.886}{60}) \cdot 111.12$ und erhalten 0.57013 km bzw. 570.13 m. Die beiden Punkte aus der Angabe haben die kartesischen Koordinaten $P_1 = (0 \mid 0)$ und $P_2 = (570.13 \mid 240.76)$. Nun lassen sich zwei Geraden in Parameterform angeben, indem man den den Richtungsvektor der ersten Geraden $(\tan(31.807°) \mid 1)$ und den der zweiten Geraden $(\tan(-46.812°) \mid 1)$ wählt. Anschließend schneidet man die Geraden und erhält den Schnittpunkt $(246 \mid 265)$, durch Rückumwandlung in GPS-Koordinaten ergibt sich $(16.368° \mid 48.219°)$, also hat der Schnittpunkt die Angabe $N48°13.151'$ und $E16°22.205'$ (vgl. Schowalter, A., (2013), S. 54). Die Arbeit in GeoGebra beginnt damit Eingabefelder zu erstellen, in welche die Zahlenwerte eingegeben werden, dann arbeitet man am besten im CAS Schritt für Schritt die oben beschriebene Reihenfolge ab. Wer möchte, kann die Geraden noch auf einen Screenshot auf Google-Maps zeichnen. Wir sehen da, dass die beiden Punkte jeweils eine U-Bahn-Station darstellen, einmal die Station Schottenring und einmal die Station Schottentor. Die Peilung führt von dem Punkt

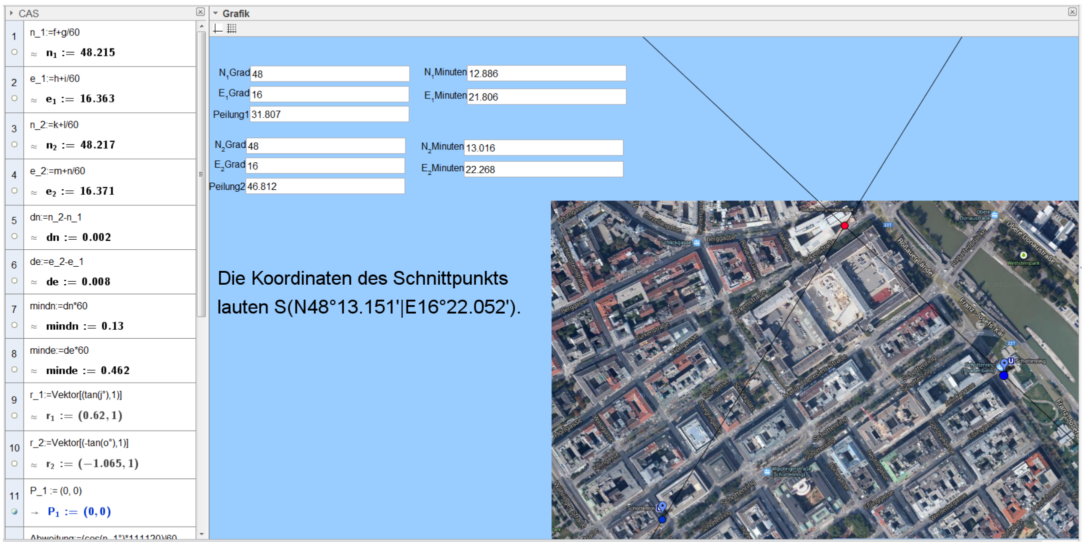

Abbildung 12: Einblick in das Applet

in Richtung Oskar-Morgenstern-Platz, der neue Standort der Fakultät für Mathematik. Der Dodekaederstern (siehe Abbildung 13) stellt den Schatz der Aufgabe dar!

Abbildung 13: Schatz (Quelle: http://www.xxyyzz.cc/, 18.4.2014)

6.2. Mögliche Gefahren

Die Verwendung von Werkzeugapplets birgt die Gefahr, dass die Lernenden die Konstruktion des Applets nicht verstehen. Werkzeugapplets unterstützen das, denn die Konstruktion wird, wenn überhaupt, nur einmal durchgeführt und dann im Unterricht bzw. wie oben in der Freizeit verwendet. Die Lernenden, die die Konstruktion nicht verstanden haben, arbeiten mit einer Black-Box, die sich für sie auch nicht mehr erhellt. Das Delegieren bestimmter Tätigkeiten an die Software richtet den Blick auf die Anwendung, Eingabe der Daten und Ablesen der Lösung, das Verstehen des Lösungswegs rückt zumindest für einen Teil in den Hintergrund, denn diesen überspringen die User mit Hilfe des Applets.
Gewisse Werkzeuge funktionieren nur, wenn bestimmte Annahmen erfüllt sind. Das oben vorgestellte Applet versagt, wenn es sich um Entfernungen über mehrere tausend Kilometer handelt, wie Wien - New York. Applets liefern unter solchen Umständen in den meisten Fällen auch Ergebnisse, jedoch der „schöne Schein" trügt. Schüler/innen neigen dazu die äußere Form des Applets zu bewerten und schließen dann auch noch auf die Richtigkeit des Ergebnisses. Die gedankenlose Auslieferung an die Technik muss durch einen kritischen Blick hinter die Kulissen geübt werden (vgl. Leuders, T., (2003), S. 202 und S. 209).
Die Erstellung eines Werkzeugapplets für jede noch so geringe kognitive Leistung führt zur einer Entwicklung in die falsche Richtung. Der Mathematikunterricht darf nicht auf das unverstandene Verwenden von Werkzeugenapplets reduziert werden.

7. Nicht vorstrukturierte Nutzung

Was ist unter nicht vorstrukturierter Nutzung zu verstehen? Bis jetzt war die Nutzung von GeoGebra streng vorgegeben, in diesem Abschnitt wird genau das aufgehoben. Das heißt, die Lehrperson gibt Schülerinnen und Schüler nicht mehr vor, wann bzw. wie bzw. ob sie GeoGebra benutzen sollen, sondern die Lernenden sind dafür selbst verantwortlich. Das Programm GeoGebra steht also ohne vorgefertigte Konfigurationen, aber mit all seinen Werkzeugen allen Schülerinnen und Schüler zu Verfügung. In der Literatur unterscheidet man in so einem Fall zwischen drei verschiedenen Nutzungsweisen (vgl. Roth, J., (2005-3), verändert). GeoGebra kann verwendet werden als ...

1. Kommunikationsmittel: Die Software GeoGebra lässt sich als heuristisches Argumentationsmittel in mathematischen Diskussionen verwenden.
2. „Denkzeug"/Denkunterstützung: Es werden gewisse Tätigkeiten an den Computer bzw. an GeoGebra ausgelagert oder delegiert. Dabei kann es sich um Routinetätigkeiten, aber auch um komplexe Vorgänge handeln.
3. Kontrollinstanz: Nach bereits durchgeführten Prozessen, wie Denkvorgängen, Berechnungen oder Umformungen, wird GeoGebra dazu verwendet, um zu überprüfen, ob das zuvor Durchgeführte auch korrekt ist.

GeoGebra ermöglicht durch ihre Bauweise einen sehr wirkungsvollen Einsatz, denn wie der Name schon verrät, lassen sich Algebra und Geometrie, aber auch die weiteren Ansichten, auf sehr wirkungsvolle Weise verbinden (vgl. Hohenwarter, M., (2006-1), S. 55ff und vgl. Roth, J., (2008-2), S. 8). In diesem Zusammenhang wird noch näher auf das Computer-Algebra-System(CAS) von GeoGebra eingegangen. Ein CAS gehört, vor allem in Hinblick auf die neue zentrale Reifeprüfung, zum Pflichtprogramm in der Schule. Was soll nun schon in der 5. Klasse AHS durchgenommen werden? Dazu ein möglicher Vorschlag, der sich auch am Lehrplan orientiert:

1. Bestätigungsart: Jede Eingabe kann in GeoGebra auf zwei Arten bestätigt werden. Einerseits mit *„Berechne"*, dann werden die eingegebenen Zahlen in symbolischer (exakter) Form dargestellt und andererseits mit *„Numerisch"*, dann werden die Zahlen in gerundeter Dezimaldarstellung ausgegeben.
2. Ausmultiplizieren/Faktorisieren: Schüler/innen sollen mit dem CAS Termumformungen durchführen können.

3. Gleichungen und Gleichungssysteme: Die Syntax der Eingabe für Gleichung und Gleichungssysteme, sowie das Interpretieren der Ausgabe sollen die Schüler/innen können.

4. Parameter: Schüler/innen sollen Objekten Werte zuweisen können, in GeoGebra gelingt dies mit :=, z. B.: $a := 3$ weist der Variable a den Wert drei zu.

5. Behandeln von Vektoren: Schüler/innen sollen Vektoren eingeben und Berechnungen durchführen können und diese im Grafikfenster darstellen können.

Solche Systeme haben mittlerweile schon eine lange Geschichte im Mathematikunterricht, dementsprechend gibt es dazu einiges an Literatur. In diesem Zusammenhang sei eine Untersuchung von H.-G. Weigand erwähnt. Die Ergebnisse besagen, dass die vertraute Handhabung von CAS ein langer Prozess ist, Schüler/innen brauchen fast ein Schuljahr um Sicherheit im Umgang mit CAS zu bekommen und um das CAS sinnvoll beim Problemlösen zu benutzen. Es bleibt hervorzuheben, dass Schüler/innen, die ein CAS benutzen mehr experimentieren als Schüler/innen die keines benutzen. Das sollte vor allem in der 5. Klasse beachtet werden (vgl. Weigand (2009), S. 3). Obwohl die heutigen Schüler/innen als „Digital Natives" (digitale Eingeborene) bezeichnet werden, ist der gekonnte Umgang mit einem CAS nicht ohne weiteres selbstverständlich! Das CAS befreit die Schüler/innen zwar von Routinetätigkeiten, aber nicht von der Mathematik. Das Gegenteil ist der Fall, der mathematische Kern kommt noch deutlicher zum Vorschein (vgl. Elschenbroich, H.-J., (2003), S. 215).

8. Epilog

Der verpflichtende Einsatz höherwertiger Technologie bei der standardisierten Reifeprüfung beim Haupttermin 2018 birgt Vorteile und Nachteile. Es stellt sich die Frage, Fluch oder Segen? Tagungsvorträge und Diskussionen bestätigen, Technologie macht den Mathematikunterricht komplexer. An dieser Stelle sei der Hirnforscher Manfred Spitzer erwähnt, der mit seinem Buch „Digitale Demenz" für Aufsehen gesorgt hat. Es weist in seinem Buch und auch auf einigen Vorträgen darauf hin, dass eine gedankenlose Verwendung des Computers keinen Lernfortschritt bewirkt. In seinem Buch liest man über eine groß angelegte Studie, in der Manfred Spitzer einen Vergleich zwischen Schülerinnen und Schüler, die mit Computer unterrichtet wurden, und Schülerinnen und Schüler, die ohne Computer unterrichtet wurden, beschreibt. Das Interessante an der Studie ist, dass die Ergebnisse umso schlechter ausfielen, desto häufiger der Computer benutzt wurde. Am schlechtesten schnitten jene Schülerinnen und Schüler ab, die vorwiegend gegoogelt haben (vgl. Spitzer, M., (2012)). Trotzdem darf dabei nicht vergessen werden, Technologie spielt in unserem alltäglichen Leben und auch in der Wissenschaft eine wichtige, ja unverzichtbare Rolle und aus dieser Sicht gesehen, ist die verpflichtende Einführung ein Schritt in die richtige Richtung. Es wäre mit Sicherheit der falsche Schluss den Computer aus der Schule zu verbannen, auf alle Fälle gehört über den Technologieeinsatz im Mathematikunterricht nachgedacht.
Abschließend sei gesagt, Technologie liefert vielfältigste Einsatzmöglichkeiten, neue Ideen und neue Spannungsfelder. Einem abwechslungsreichen Mathematikunterricht steht also nichts mehr im Wege!

Literatur

Elschenbroich, H.-J., (2003), *Unterrichtsgestaltung mit Computerunterstützung.* In: Mathematik Didaktik, S. 212-233, Cornelson Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, Berlin.

Hohenwarter, M., (2006), *GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht.* Dissertation, Salzburg.

Hohenwarter, M., (2006), *Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra.* In: Proceedings of Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik, Eichstätt-Ingolstadt.

Leuders, T., (2003), *Chancen und Risiken des Computereinsatzes im Mathematikunterricht.* In: Mathematik Didaktik, S.198-211, Cornelson Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, Berlin.

Malle, G./Woschitz, H./Koth, M./Salzger, B., (2010), *Mathematik verstehen 5.* öbv&hpt Verlag, Wien.

Roth, J., (2005), *Figuren verändern – Funktionen verstehen.* In: Beträge zum Mathematikunterricht, 39 ,S. 481-484.

Roth, J., (2008-1), *Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?* In: Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathmatikunterricht und Informatik“.

Roth, J., (2008-2), *Systematische Variation Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra.* In: Mathematik lehren, 146, S. 17-21.

Schowalter, A., (2013), *Einsatz von Geocaching mit GPS-Geräten in der Einführung der Analytischen Geometrie.* In: Mathmatikunterricht, 59, S. 51-59.

Spitzer M., (2012), *Digitale Demenz: Wie wir unsere Kinder um den Verstand bringen.* Droemer Knaur Verlag, München.

Vogel, M., (2007), *Multimediale Unterstützung zum Lesen von Funktionsgraphen – Grundlagen, Anwendungen und empirische Untersuchung eines theoriegeleitenden Ansatzes zur Arbeit mit multiplen Repräsentationen.* In: mathematica didactica, 30, S. 3-28.

Weigand, H.-G., (2009), *CAS we can!- But should we? The integration of symbolic calculators into mathematics lessons.* In: the proceedings 2009 of ICTMT 9 in Metz, S. 1-6.

Nützliche Internetlinks

Weitere Ideen und Anregungen finden die interessierten Lerser/innen unter den angegebenen Links

- GeoGebra Skripting `http://wiki.geogebra.org/de/Skripting_Befehle` (Zugriff: 16.4.2014)
- Informtionen zu Geocaching `http://www.geocache.at/cms/startseite` (Zugriff: 9.4.2014)
- Lernpfade des regionalen Fachdidaktikzentrums der PH NÖ `http://rfdz.ph-noe.ac.at/material/lernpfade.html` (Zugriff: 16.4.2014)
- Lernpfade auf Matheonline `http://www.mathe-online.at/lernpfade/` (Zugriff: 16.4.2014)
- Lernpfade vom Projekt Medienvielfalt `http://www.austromath.at/medienvielfalt/` (Zugriff: 16.4.2014)
- Lernpfade des Arbeitskreis GeoGebra über die Homepage des deutschen Didaktikers Jürgen Roth `http://www.juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/index.html` (Zugriff: 16.4.2014)
- Lernpfade des Arbeitskreis Mathematik Digital `http://wikis.zum.de/zum/Mathematik-digital` (Zugriff: 16.4.2014)
- Vorgefertigte Applets zum Download liefert die Plattform GeoGebraTube `http://geogebratube.org` (Zugriff: 16.4.2014)